

# 关于《复变函数与积分变换》中柯西 ——古萨定理这节课的教学反思

王晴雯 岳阳铭

(安阳工学院, 河南 安阳 455000)

**摘要:** 复变函数与积分变换是机械、电气、计科等专业的一门重要的数学公共必修课, 柯西——古萨积分定理也是第三章乃至这门课的重点, 是复积分的理论基础, 学生是从这一节课开启复积分的大门的, 所以这节课的学习效果如何对学生尤为重要, 为了更好地提升复变函数与积分变换的教学, 让学生对复积分了解得更深入, 以柯西——古萨定理这节课为例, 进行教学设计和实际教学, 并从授课的内容, 授课的方法和方式, 及所应用的教学方式这些方面进行教学反思, 反馈一些自己的教学体会, 从而改进并更新本节课的教学, 对学生进行一些有益的引导, 从而提升复变课堂教学效果。

**关键词:** 复变函数与积分变换 柯西-古萨定理 课堂教学 教学反思.

**中图分类号:** G642    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1003-9082 (2023) 03-0182-03

## 一、课前准备内容及反思

为了这节课准备得更加充分, 教师可以借助超星学习通等网络教学平台, 提前将本节课所要学习的内容录制成视频, 视频需与本节课线下教学相符合, 录制视频的时间20分钟左右即可, 不需要太长时间, 将本节课的重难点给学生过一遍, 将课上比较难懂的知识点通过这种方式让学生提前预习, 可以对线下实际教学提前做一些铺垫与补充, 学生也能标注出不太懂的地方, 上课与老师进行讨论, 其实相当于通过查资料、学视频的方式让学生自主发现问题, 带着问题去听课, 学生对本节课的印象才会更深, 理解得才会更加深刻, 也能提高学生学习的积极性<sup>[1-2]</sup>。

## 二、教学过程分析及反思

### 1. 问题引入

回顾1: 复习上一节所举的例题, 被积函数  $f(z) = z^2$  在  $z$  平面上处处解析, 它沿连接起点与终点的任何路径的积分值相同, 也就是说该积分与路径无关。另一被积函数  $f(z) = \text{Im}(z)$  在  $z$  平面上处处不解析, 其积分值依赖于连接起点与终点的路径。回顾2: 积分  $\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \neq 0$ , 曲线  $C$  表示圆周:  $|z-z_0|=r>0$ 。其中被积函数  $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$  在  $z$  平面上除去点  $z_0$  外处处解析, 但这个区域不是单连通区域。

### 教学反思:

由于大多数学生对数学并不是很感兴趣, 复变理论性比较强, 为了提高学生学习的积极性在新知讲解前设置了这样两道问题, 帮助学生复习上节课所做的积分习题的同时, 让学生发现问题, 产生学习的动力, 从而引入新知。

不足之处是, 在探讨这两个问题积分与路径无关是与函数解析性有关的时候, 可以让学生自己在练习本上用C-R方程去计算出两个函数的解析性, 从而发现解析函数和积分与路径无关这样的关联, 否则教师如果自己直接告诉学生因为这个函数是解析的, 所以这个积分与路径无关, 学生没有自己的探索经历, 接受起来可能会比较被动, 这样即帮助学生复习了第二章的知识, 也让学生知道了数学内容之间是相互联系的, 更加强调重点公式的重要性。并且在学生用C-R方程计算函数解析性的时候可以用学习通随机点名提问的方式, 让学生说出结果, 然后引导学生找出函数解析性与积分路径无关的关系, 这样既解决了问题, 也能与学生实现互动, 采用鼓励式的教学方式, 对学生之前的学习知识掌握情况进行肯定或者鼓励, 既帮助学生复习了之前的知识, 也让学生也更加对今后的学习充满信心<sup>[3-4]</sup>。

### 2. 柯西-古萨定理及推导和教学反思

定理3.2 (柯西-古萨定理) 若函数  $f(z)$  是单连通域  $D$  内的解析函数, 则  $f(z)$  沿  $D$  内任一条闭曲线  $C$  的积分为零, 即

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

证明:

假设函数  $f(z) = u+iv$  在单连通域  $D$  内处处解析,  $f'(z)$  在  $D$  内连续, 由第二章2.3节中的 (2.9) 式知  $u, v$  对  $x, y$  的偏导数在  $D$  内连续。设  $z=x+iy$ ,  $C$  为  $D$  内任一条简单闭曲线。则由 (3.5) 式, 有

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

记  $G$  为  $C$  所围区域, 由格林 (Green) 公式有

$$\int_C u dx - v dy = \iint_G \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

由于  $f(z)=u+iv$  在  $D$  内解析, 所以  $u$ 、 $v$  在  $D$  内处处都满足柯西-黎曼方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

因此

$$\int_C u dx - v dy = \int_C v dx - u dy = 0.$$

从而

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

教学反思:

带着问题, 开门见山引入概念, 和学生在师生互动中共同完成概念的推导和学习。首先, 对于柯西——古萨这样的数学定理建议教师可以用自己的语言表达出来, 加以举例或者配图进行解释, 能让学生更直白地了解定理重难点, 达到深入浅出的教学效果。其次, 由于现在教学技术的突飞猛进, 使用多媒体已经成为教师的首选, 因为多媒体课件色彩丰富, 比较生动, 简单明了, 可以清晰地表达数学概念、公式或者一些图像等, 但是作为数学课, 反思自己的教学过程, 有些同学不喜欢公式的推导, 只喜欢记住定理和应用, 觉得会做题就好, 不想知其所以然, 所以用课件进行公式的讲解学生们抬头率很低, 但是这种注重结果不注重过程的学习态度是不提倡的, 所以在柯西——古萨定理这方面推导过程教师还是尽量通过板书进行, 这样一步一步地通过教师的粉笔牵引学生的思路, 有利于吸引学生的眼球, 因为在书写的过程中也能够及时补充知识点并与学生进行互动<sup>[5-7]</sup>。比如说柯西——古萨定理证明过程中需要用到高数中的格林公式, 此时的学生已经有一定的高数基础, 教师就可以提问学生还记不记得格林公式, 将格林公式带入复积分应该如何表达, 这一过程可以让学生到黑板上进行, 教师进行点评或者纠错, 学生能够参与到新知的探索过程中, 不是一味地被动地接受新知, 从而让学生对概念和公式有更深刻的体会, 让学生体会到复变不是那么烦琐和困难, 也是可以自行经过努力解决的。在公式讲解的过程中经常还有一个问题就是有些同学已经忘记格林公式是什么了, 只记得这个名字, 为了让学生更好地参与到教学过程中, 配合教学活动, 建议讲这节课之前让学生带着高数书到课堂上来, 讲到概念用到这个公式的时候让学生像查字典一样进行翻阅查找, 告诉学生忘记是很正常的, 及时复习就可以了, 要给予鼓励式教学, 给学生以信心, 让学生感受到复变函数与高等数学联系密切, 并建议学生自己可以在课下抽时间复习与之相关联的高数知识, 这样有利于复变函数的理解和学习<sup>[8-9]</sup>。

### 3. 例题讲解和教学反思

例题 1: 计算积分  $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz$  的值

(1) 积分区域  $|z| \leq 1$  为单连通区域

(2) 被积函数  $f(z) = \frac{1}{2z-3}$  的唯一奇点是  $z = \frac{3}{2}$ ,

改点  $|z|=1$  在的外部, 因此  $f(z) = \frac{1}{2z-3}$  在  $|z| \leq 1$  内解析

综上, 根据柯西-古萨定理, 有  $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$

教学反思:

复变是理论性较强的数学课, 但是在工科学生今后专业课学习中基本用不到复变的公式证明, 所以要强化积分公式的应用, 才能更深入地理解概念。像这道题属于柯西——古萨定理的第一道例题, 学生刚学完概念往往还摸不到头脑, 不知道如何下手。在这一部分的教学教师可以先进行引导再让同学们去做, 不能直接抛给学生, 同学们刚接触复积分, 还不能从实函数转变过来也是可以理解的, 要给予启发式教学, 否则学生就会在不知不觉中对复变产生恐惧, 这节课也就抓不住学生的心。在给予适当引导后, 比如问学生这个积分区域是单连通还是多连通的, 让学生回答; 然后再问学生这个被积函数在积分区域里面有没有孤立奇点, 再让同一个学生回答, 让学生讲解自己的思路, 这样引导着学生, 学生就知道了如果这个函数是解析函数, 并且是单连通区域, 就可以用柯西古萨定理, 积分直接为 0, 让学生通过做题再次明白柯西——古萨定理应用的两个条件, 缺一不可, 同时学生也就明白了在做数学题目的时候, 虽然刚开始没有头绪, 但是仔细观察后, 结合所学定理, 其实是相当容易的, 一定要找准解题方法。这样教师通过语言上的引导, 让学生自主探索自主思考, 给予辅助, 学生在展现自我, 解决问题的同时也能够提升自己的语言表达能力, 起到榜样的教育作用, 其他同学也更愿意倾听同班同学的思路与看法, 给予肯定或者纠错, 实现课堂的良性互动, 达到例题应用的教学目标<sup>[10]</sup>。

### 4. 变式训练和教学反思

求  $1. \int_C z^2 e^z dz$  ( $C$  是定点为  $-2, -i, 2, i$ ) 的四边形所围区域的边界曲线

$$2. \int_{|z|=1} \frac{dz}{\cos z}$$

教学反思: 虽然课件比较直观方便, 但是为了更好的教学效果, 通过本人的实际课堂效果对比, 个人觉得利用超星学习通的学习平台, 将这两道变式训练发放给学生, 这样可以使每一位学生都参与到教学过程中, 学生将自己的答题过程拍照上传到平台, 教师可以快速浏览提交学生

的答题情况,并给予打分,作为课堂表现奖励,记入平时成绩中,这样可以提高学生的参与度和学生学习的积极性。需要注意的是,这种让学生参与并且打分的习题难度不宜太大,学生做不对也得不到正反馈,导致学生学习的热情降低,反而适得其反。在学生答题的时候教师要注意学情,走下讲台,亲近学生,观察学生的学习状况,对于分心,玩手机或者睡觉的学生给予提醒,对于有问题的同学进行一对一辅导和解答<sup>[11]</sup>。并且教师打分的时候要注重答题过程,不能只注重结果,要让学生们了解思路是最重要的,结果是其次的,否则对于一些结果算错但是过程没问题的同学也会觉得有些失望,会消耗掉自己上进的热情。可以将出现问题的学生的答题过程进行投屏,让同学们进行点评,纠错,这样能激发学生们的探索精神,增强课堂的活力,将写得好的同学的答案可以利用学习通发放给大家,让大家在课后可以随时随地地向优秀同学学习,改进自己的方式和方法,这种碎片化学习,也是当代大学生比较喜欢的一种学习方式。

#### 5.课后小结

##### 5.1通过本节课的学习,掌握柯西——古萨定理

若函数 $f(z)$ 是单连通域 $D$ 内的解析函数,则 $f(z)$ 沿 $D$ 内任一条闭曲线 $C$ 的积分为零,即

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

##### 5.2注意定理成立的条件

###### 5.2.1单连通区域

###### 5.2.2注意不能反过来用

#### 教学反思:

将本节课学习的知识进行总结,帮助学生梳理本节课的重点难点,为下节课的学习做出铺垫。首先,在总结完知识点后,为了丰富学生的课后学习活动,其实可以再次利用学习通网络平台向学生发放拓展练习,比如可以加入慕课视频让学生对本节课的学习再次回顾,结合学生们的生活习惯,利用碎片化的时间可以对所学知识加深印象,因为网络视频更加直观生动,就像学习强国一样,给学生发放课后视频学习,同学们利用闲暇时间不知不觉就被熏陶了,这种潜移默化的影响也对学生学习数学很有帮助。其次,对于那些学习成绩很好,心有余力的学生,教师也可以利用学习通平台,布置一些课后拓展题目,让学生进行挑战,如果下节课有时间的話,可以让他同学们进行展示,即肯定了学生的学习成果,也对别的同学也是一种激励和引导<sup>[12]</sup>。

#### 结语

在复变函数的教学过程中,同学们经常会觉得这门课

重理论轻应用,他们的专业知识似乎与复变有些脱离,这是学生普遍反映的情况。因为数学教师的学科研究背景可能比较单一,偏重数学理论,对于工科知识了解不多,所以授课教师应该多与学生所在专业教师进行学习和探讨,将学生经常遇到的专业型的问题与复变课程联系起来,构造出数学模型,布置一些与学生专业领域相关的应用型问题。同时结合不同工科学生的专业,在复变课堂上增加符合学生专业知识的内容,达到活学活用的教学效果。在复变的教学中,为了实现现在社会所需要的应用型人才,一定要慢慢改变教学方式,线上+线下双管齐下,各种模式相互结合,并与现代化技术与板书相结合,讲课要注意节奏,详略得当,不断地对自己实际的课堂教学进行反思,创造轻松愉悦的教学氛围。

#### 参考文献

- [1]张肇驰.基于“雨课堂”的《复变函数与积分变换》课上设计[J].科技资讯,2021,19(01):172-175.
- [2]王凡,孔倩,张新华.“以学生为中心”原则下的复变函数与积分变换课程教学设及的若干思考[J].科技风,2021(10):59-60.
- [3]龚定东,郭玉琴.关于复变函数与积分变换课堂教学的思考[J].高等数学研究,2009,12(04):93-95.
- [4]李志艳.《复变函数与积分变换》学习兴趣培养[J].读与写(教育教学看刊),2019,16(01):19.
- [5]洪云飞,赵天玉,陈忠.《复变函数与积分变换》课程教学改革思考[J].长江大学学报(自科版),2014,11(25):117-119.
- [6]肖华,王忠良.应用型本科复变函数与积分变换课程的教学探讨[J].科教文汇(下旬刊),2021,10:63-65.
- [7]姜皓.浅析在工科院校中《复变函数与积分变换》的学习兴趣培养[J].农村经济与科技,2020,31(14):253-255.
- [8]徐彬,郑田娟,彭爱梅.《MSOffice高级应用》课程教学研究[J].电脑知识与技术,2022,18(14).
- [9]百度文库.偏微分方程求解,复变函数的积分[OL].http://wenku.baidu.c.2017.
- [10]PPT下载.第三章复变函数的积分[OL].https://ishare.iask.2021.
- [11]王根.广义Cauchy-Riemann方程的相关研究[D].浙江:浙江师范大学,2020.
- [12]冯岚.运用评估提升初中生物学教学效果的实践研究[J].中学生物教学,2021(31):21-22.

作者简介:王晴雯(1994.05—),女,汉族,山东莱州人,硕士,助教,安阳工学院,研究方向:学科教学数学。